

KONKURS O TYTUŁ
NAJLEPSZEGO MATEMATYKA

III LO w TARNOWIE

V ETAP

Zad. 1. (5 pkt.) Wykazać, że równanie

$$x^5 = y^2 + 4$$

nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych x, y .

Zad. 2. (5 pkt.) Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Udowodnić, że iloczyn wszystkich liczb pierwszych nie większych niż n nie przekracza 4^{n-1} .

Zad. 3. (5 pkt.) Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek

$$a + b + c = 1.$$

Dowieść, że

$$\sqrt{9a+1} + \sqrt{9b+1} + \sqrt{9c+1} \leq 6.$$

Zad. 4. (5 pkt.) Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AC = BC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Na boku BC wybrano punkt D taki, że prosta OD jest prostopadła do prostej BI . Wykazać, że prosta ID jest równoległa do prostej AC .